Exercice 1. (a) On se souvient que la matrice $A = (a_{ij})$ de l'application linéaire f dans les bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ est définie par $f(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i$. Si $\mathscr{B}'$ est orthonormée on a alors

$$\langle w_i, f(v_j)\rangle = \langle w_i, \sum_{k=1}^m a_{kj} w_k\rangle = \sum_{k=1}^m a_{kj} \underbrace{\langle w_i, w_k\rangle}_{=\delta_{ik}} = a_{ij}.$$

(Noter qu'on n'a pas besoin de supposer que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée).

(b) La matrice P de changement de bases est définie par la relation $w_i = \sum_{r=1}^n p_{ri} v_r$. On a donc

$$\begin{aligned}
\langle w_i, w_j\rangle &= \left\langle \sum_{r=1}^n p_{ri} v_r, \sum_{s=1}^n p_{sj} v_s \right\rangle \\
&= \sum_{r=1}^n \sum_{s=1}^n p_{ri} p_{sj} \langle v_r, v_s\rangle \\
&= \sum_{r=1}^n p_{ri} p_{rj} \\
&= \sum_{r=1}^n p^t_{ri} p_{rj}.
\end{aligned}$$

(On a utilise à la troisième ligne l'hypothèse $\langle v_r, v_s\rangle = \delta_{rs}$) .

Ce calcul montre que la base $\mathscr{B}'$ est orthonormée si et seulement si les coefficients de la matrice $P^t P$ sont δ_{ij}, c'est-à-dire si $P^t P$ est la matrice identité.

Exercice 2. (a) C'est la troisième réponse qui est correcte. Un vecteur v tel que $g(v, v) = 0$ s'appelle un *vecteur isotrope*, et il existe un vecteur isotrope non nul si et seulement si $0 < p < n$ (donc si g n'est ni défini positive ni définie négative).

(b) La bonne réponse est la première option, qui correspond exactement à la définition d'une forme bilinéaire non dégénérée. (la troisième option dit au contraire que la forme bilinéaire est dégénérée (attention à la logique !) et la seconde option ne dit rien du tout sur la forme bilinéaire car on peut prendre $v = 0$).

Exercice 3. 1. Avant de répondre à la première question, on rappelle d'abord que le rang d'une matrice $A \in \mathrm{M}_n(\mathbb{K})$ est la dimension de l'image de l'application linéaire associée (i.e. l'application $x \mapsto Ax$). Il est aussi clair, par le théorème du rang, que $\mathrm{rang}(A) = n - \dim(\mathrm{Ker}(A))$.

Par des résultats du premier semestre, on sait que si A et A' sont deux matrices telles que $A' = QAP$ où P et Q sont des matrices inversibles, alors $\mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(A')$ (on peut par exemple invoquer que sous cette condition A et A' représentent la même application dans des bases différentes. Voir aussi le théorème 5.12.4 dans le polycopié du premier semestre.)

La preuve de l'affirmation (a) est maintenant très simple : deux matrices A et B sont congruentes si et seulement s'il existe une matrice P inversible telle que $A = P^tBP$. Comme P est inversible, P^t l'est aussi et donc A et B ont même rang par l'argument précédent.

Remarque 1. Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ est le corps des réel, l'énoncé (a) peut aussi être vu comme une conséquence du théorème de Sylvester.

2. Soit β la forme bilinéaire symétrique dont la matrice de Gram est A. Par le théorème de diagonalisation des formes bilinéaires symétriques vu au cours (théorème 10.4.1), on sait qu'il existe une base orthogonale $\{v_1, ..., v_n\}$ pour β. Quitte à réordonner la base, on peut supposer que $Q(v_k) = 0$ si $k > r = \mathrm{Rang}(Q)$. On a donc dans notre base

$$Q(v_i) = \beta(v_i, v_i) = a_i \neq 0 \;\text{ si } 1 \leq i \leq r, \quad Q(v_k) = \beta(v_k, v_k) = 0 \;\text{ si } k > r,$$

et $\beta(v_i, v_j) = 0$ si $i \neq j$. Rappelons que tout nombre complexe admet une racine carrée. En définissant une nouvelle base $\{w_1, ..., w_n\}$ par $w_i = \frac{v_i}{\sqrt{a_i}}$ pour $i = 1, ..., r$ et sinon $w_i = v_i$, on obtient que dans la base des w_i, la matrice à la forme voulue car pour $i = 1, \ldots, r$

$$\beta(w_i, w_i) = Q(w_i) = \frac{1}{a_i}Q(v_i) = 1.$$

A titre d'exemple, on a la congruence suivante dans $\mathrm{M}_2(\mathbb{C})$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(avec $i = \sqrt{-1}$).

Exercice 4. Notons g la forme bilinéaire symétrique associée à Q, on a donc

$$g\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = x_1y_1 - x_2y_2.$$

Par conséquent, les vecteurs $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$ et $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ forment une base de Sylvester pour la forme quadratique Q si et seulement si

$$u_1^2 - u_2^2 = 1, \quad v_1^2 - v_2^2 = -1, \quad u_1v_1 - u_2v_2 = 0.$$

On sait qu'il existe $s \in \mathbb{R}$ unique tel que $u_2 = \sinh(s)$. Alors $u_1^2 = 1 + u_2^2 = \cosh(s)^2$. Par conséquent

$$u = \begin{pmatrix} \varepsilon \cosh(s) \\ \sinh(s) \end{pmatrix},$$

avec $\varepsilon = \pm 1$. De même il existe $t \in \mathbb{R}$ unique tel que $v_1 = \sinh(t)$ et donc

$$v = \begin{pmatrix} \sinh(t) \\ \varepsilon' \cosh(t) \end{pmatrix}$$

avec $\varepsilon' = \pm 1$. Finalement la condition $u_1 v_1 - u_2 v_2 = 0$ nous dit que $\dfrac{u_2}{u_1} = \dfrac{v_1}{v_2}$; nous avons donc $\tanh(s) = \varepsilon' \tanh(t)$, c'est-à-dire $t = \pm s$, et par conséquent

$$v = \begin{pmatrix} \sinh(s) \\ \varepsilon \cosh(s) \end{pmatrix} \quad \text{si } t = s \quad \text{et} \quad v = -\begin{pmatrix} \sinh(s) \\ \varepsilon \cosh(s) \end{pmatrix} \quad \text{si } t = -s.$$

Exercice 5. (a) L'indicatrice positive $S_+(V,Q)$, l'indicatrice négative $S_-(V,Q)$ et le cône isotrope $S_0(V,Q)$ d'une forme quadratique Q définie sur une espace vectoriel réel V sont définis respectivement par

$$\begin{aligned} S_+(V,Q) &= \{x \in V b Q(x) = +1\}, \\ S_-(V,Q) &= \{x \in V b Q(x) = -1\}, \\ S_0(V,Q) &= \{x \in V b Q(x) = 0\}. \end{aligned}$$

(b) Soient Q_1, Q_2 vérifiant les hypothèses en (b) et soit $x \in V$. On doit prouver que $Q_1(x) = Q_2(x)$. On distingue trois cas.

1. Si $\alpha = Q_1(x) > 0$, on pose $x' = x/\sqrt{\alpha}$. Alors $x' \in S_+(V,Q_1) = S_+(V,Q_2)$. Donc $Q_2(x') = 1$ et $Q_2(x) = \alpha Q_2(x') = \alpha = Q_1(x)$.
2. Si $\alpha = Q_1(x) < 0$, on pose $x' = x/\sqrt{-\alpha}$. Alors $x' \in S_-(V,Q_1) = S_-(V,Q_2)$. Donc $Q_2(x') = -1$ et $Q_2(x) = (-\alpha) Q_2(x') = \alpha = Q_1(x)$.
3. Si $Q_1(x) = 0$, alors $x \in S_0(V,Q_1) = S_0(V,Q_2)$. Donc $Q_2(x) = 0$.

On a démontré que dans tous les cas $Q_2(x) = Q_1(x)$.

(c) Notons Q_2 la forme quadratique sur V définie par $Q_2(x) = Q(f(x))$, et observons que l'hypothèse $f(S_+(V,Q)) = S_+(V,Q)$ implique que

$$x \in S_+(V,Q_2) \quad \Leftrightarrow \quad Q_2(x) = Q(f(x)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad f(x) \in S_+(V,Q) \quad \Leftrightarrow \quad x \in S_+(V,Q).$$

Cela prouve que $S_+(V,Q_2) = S_+(V,Q)$. On prouve de même que $S_-(V,Q_2) = S_-(V,Q)$ et $S_0(V,Q_2) = S_0(V,Q)$. Par le point (b) on déduit maintenant que $Q_2 = Q$, c'est-à-dire $Q(f(x)) = Q(x)$ pour tout $x \in V$.

Exercice 6. (a) Oui. Le critère pour qu'une matrice soit définie positive comprend en particulier la condition que son déterminant doit être > 0, donc non nul, ce qui garantit qu'elle doit être inversible.

(b) La réponse est négative. Si $A' = P^t A P$, alors $\det(A') = \det(P)^2 \det(A) \neq \det(A)$ en général (mais si elles sont orthogonalement congruentes, elles ont le même déterminant).

(c) Non. Par exemple la forme quadratique sur $\mathbb{R}^2$ définie par

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_1x_2$$

vérifie $Q(1,0) = Q(0,1) = 1 > 0$ mais $Q(1,-1) = -1$.

(d) Correct (il suffit de relire les définitions).

Exercice 7.

1. En calculant la polarisation de Q, on obtient $\beta(u,v) = u_1v_2 + u_2v_1$
2. La matrice de Gram de cette forme par rapport à la base canonique est $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Nous commençons par choisir un vecteur arbitraire u_1 tel que $Q(u_1) = \pm 1$. On ne peut pas prendre un multiple de $e_1 = (1,0)$ car $Q(e_1) = 0$. Un vecteur convenable est $u_1 = (1, \frac{1}{2})$. Cherchons maintenant un vecteur $v = (x,y)$ tel que $\beta(u_1, v) = 0$, c'est-à-dire $\frac{1}{2}x + y = 0$. Un tel vecteur est $v = (2,-1)$, ce vecteur vérifie $Q(v) = -4$ et le second vecteur de notre base généralisée est donc donné par

   $$u_2 = \frac{v}{\sqrt{|Q(v|}} = \left(1, -\frac{1}{2}\right).$$

   La base orthonormale généralisée (base de Sylvester) cherchée est donc $\{(1, \frac{1}{2}), (1, -\frac{1}{2})\}$.
4. La base précédente vérifie $Q(u_1) = 1$, $Q(u_2) = -1$ et $\beta(u_1, u_2) = 0$. La signature de Q est donc $(p,q) = (1,1)$.
5. Nous trouvons directement que le polynôme caractéristique de B est

   $$\chi_B(t) = t^2 - 1$$

   donc les valeurs propres de B sont $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = -1$. Des vecteurs propres sont faciles à trouver. Par exemple $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $\lambda = 1$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $\lambda = -1$. Il est clair que ces vecteurs propres sont orthogonaux (ce qui est compatible avec le fait que B est une matrice symétrique). Par conséquent, il suffit de les renormaliser pour avoir une base propre orthonormée.

On a donc $u_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ et $u_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. La matrice modale orthogonale cherchée est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$. On vérifie que $P^tBP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Remarque La base trouvée en (e) est aussi une base de Sylvester, c'est dû au fait que les valeurs propres de B sont ± 1. En général la diagonalisation orthogonale ne donne pas directement une base de Sylvester (bien sûr après normalisation des vecteurs on a bien une base de Sylvester).

Exercice 8. On trouve que le polynôme caractéristique vaut $\chi_A = -(X-7)^2(X+2)$, en particulier $\det(A) \neq 0$ et donc A est de rang 3. Les valeurs propres sont $+7$ avec multiplicité 2 et -2 avec multiplicité 1. La signature de A est donc $(p,q) = (2,1)$. En particulier A n'est pas définie positive.

De manière plus élémentaire, on a

$$\begin{aligned}
(x,y,z)A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= 3x^2 + 6y^2 + 3z^2 - 4xy + 8xz + 4yz \\
&= 3\left(x^2 - \frac{4}{3}xy + \frac{8}{3}xz\right) + 6y^2 + 3z^2 + 4yz \\
&= 3\left(x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z\right)^2 + \frac{14}{3}y^2 - \frac{7}{3}z^2 + \frac{28}{3}yz \\
&= 3\left(x - \frac{2}{3}y + \frac{4}{3}z\right)^2 - \frac{7}{3}(z-2y)^2 + 14y^2
\end{aligned}$$

ce qui montre que la signature est égale à $(2,1)$.

Exercice 9. (a) Notons g la forme bilinéaire symétrique sur $\mathbb{R}^n$ dont la matrice de Gram est G. Observons que

$$g(x,y) = \langle x, Gy\rangle = \langle x, A^tAy\rangle = \langle Ax, Ay\rangle.$$

Soit $\{v_1,\ldots,v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ une base orthonormée formée de vecteur propre pour G. Donc $Gv_i = \mu_i^2 v_i$ (on rappelle que les valeurs singulières de A sont les racines carrées des valeurs propres de G), et notons $w_i = \frac{1}{\mu_i}Av_i \in \mathbb{R}^m$ pour $1 \leq i \leq r$. On a alors pour $1 \leq i,j \leq r$:

$$\langle w_i, w_j\rangle = \left\langle \frac{1}{\mu_i}Av_i, \frac{1}{\mu_j}Av_j \right\rangle = \frac{1}{\mu_i\mu_j}\langle v_i, Gv_j\rangle = \frac{\mu_j}{\mu_i}\langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij},$$

car $Gv_j = \mu_j^2 v_j$. Ainsi $\{w_1, \ldots, w_r\}$ est une base orthonormée de l'image $\mathrm{Im}(A)$. Si $r = m$ (i.e. A est surjective), alors $\{w_1, \ldots, w_r\}$ est la base cherchée. Dans le cas où $m > r$, alors on complète cette base en une base orthonormée $\{w_1, \ldots, w_m\}$ de $\mathbb{R}^m$.

On vérifie facilement que les bases $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathbb{R}^n$ et $\{w_1, \ldots, w_m\} \subset \mathbb{R}^m$ vérifient les propriétés voulues.

(b) Notons $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ l'application linéaire définie par $f(x) = Ax$. La matrice de f dans les bases canoniques est la matrice A et la matrice de f dans les bases $\{v_i\}$ et $\{w_j\}$ est la matrice $D = (d_{ij})$ dont les coefficients sont

$$d_{ij} = \begin{cases} \mu_i & \text{si } i = j \leq r, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi A et D sont deux matrices de la même applications linéaire exprimées dans des bases différentes. On a donc $D = Q^{-1}AP$ où P, Q sont les matrices de changements de bases à la source et au but de f. Ces matrices sont orthogonales puisque toutes les bases considérées sont des bases orthonormées.

On peut aussi raisonner ainsi : Notons $P \in O(n)$ la matrice orthogonale dont la i^{eme} colonne est le vecteur v_i et $Q \in O(m)$ la matrice orthogonale dont la i^{eme} colonne est le vecteur w_i. La relation $AP = QD$ est alors équivalente à $Av_i = \mu_i w_i$.